Απειροστικός Λογισμός ΙΙΙ   No. 1   Date 13/01/2020

Συνέχεια Παραδείγματος 3 / Προηγ. μάθημα

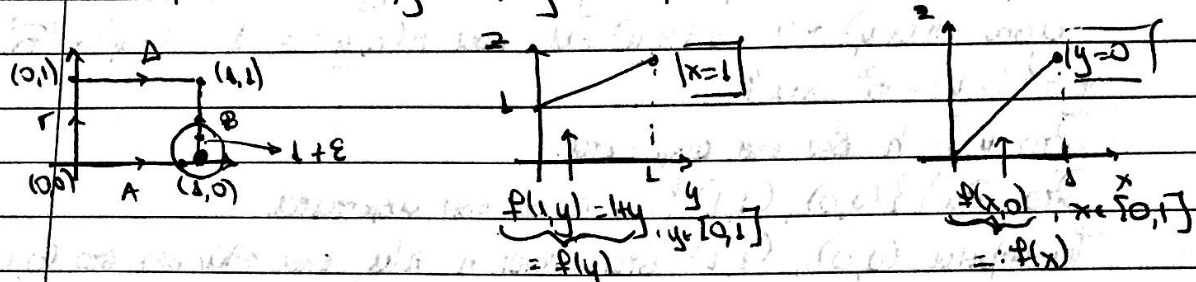
$\nabla f|_{\text{int}}(x+y) = \nabla f(x,y) \; [= \nabla g(x,y)] = (1,1)$

Επειδή η συνάρτηση f, συνεχής, $\forall (x,y)$ είναι η έχει (στο U°) ακρότατα.

Συνεπώς, αυτά θα είναι στο ∂U.

[«Περπατάμε» το σύνορο] Βλέπουμε $f(0,0) = 0 \leq f(x,0) = x \leq f(1,0) = 1$

$= f(1,0) = 1 \leq f(1,y) = 1+y \leq f(1,1) = 2$



και, ανάλογα, $f(0,0) = 0 \leq f(0,y) = y \leq f(0,1) = 1 \leq f(x,1) = x+1 \leq f(1,1) = 2$

Σε όλα αυτά, $x\in[0,1]$, $y\in[0,1]$.

Συνεπώς, στα ευθύγραμμα τμήματα

$\underset{A}{\{(x,0) : x\in(0,1)\}}$, $\underset{B}{\{(1,y) : y\in(0,1)\}}$

$\underset{\Gamma}{\{(0,y) : y\in(0,1)\}}$, $\underset{\Delta}{\{(x,1) : x\in(0,1)\}}$

Η f δεν έχει ακρότατα.

Συνεπώς τα ακρότατα (υπάρχουν σίγουρα ολικό μέγιστο και ελάχιστο!) και είναι μεταξύ των $f(0,0) = 0$, $f(0,1) = f(1,0) = 1$, $f(1,1) = 2$

$\Rightarrow$ στο (0,0) η f έχει ολικό ελάχιστο (αφού $f(x,y) = x+y \geq 0+0 = 0$

στο (1,1) -"- -"- -"- -"- μέγιστο $\forall (x,y) \in [0,1]\times[0,1]$ ...)

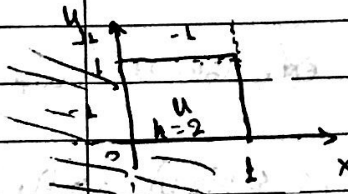
ενώ στα (0,1) και (1,0) δεν έχει ούτε μέγιστο ούτε ελάχιστο

αφού $f(1-\varepsilon,0) = 1-\varepsilon < f(1,0) = 1 < f(1,\varepsilon) = 1+\varepsilon$, $\forall \varepsilon>0$.

[για να είναι το $f(1,0)$ ακρότατο (π.χ. μέγιστο) θα πρέπει να υπάρχει $\varepsilon>0$ έτσι ώστε: $f(x,y) \leq f(1,0) = 1 \quad \forall (x,y) \in [0,1]\times[0,1] \cap B((1,0),\varepsilon)$]

και αντίστοιχα, $f(0,1-\varepsilon) = 1-\varepsilon < f(0,1) = 1 < f(\varepsilon,1) = 1+\varepsilon \quad \forall \varepsilon>0$.

Παρατήρηση: Έστω $h(x,y) = \begin{cases} x+y, & (x,y)\in[0,1]\times[0,1] \\ 3, & (x,y)\in(\mathbb{R}^2\setminus U) \text{ και } x>1 \\ -1, & (x,y)\in(\mathbb{R}^2\setminus U) \text{ και } x\le 1 \end{cases}$ $(x,y)\in\mathbb{R}^2$



Κάθε σημείο $\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x>1\} = A$ είναι σημείο ολικού μεγίστου με $h(x,y)=3\ \forall (x,y)\in A$

-1 $(\mathbb{R}^2\setminus U)\cap B$.

αφού $h(x,y)\le 2\ \forall (x,y)\in U$ και $h(x,y)=-1\ \forall (x,y)\in(\mathbb{R}^2\setminus U)$.

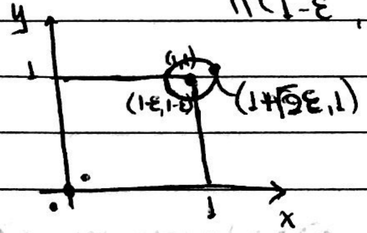
$B=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\ x\le 1\}$

Στο U η h δεν έχει ακρότατα.

Στο $\partial U\setminus\{(0,0),(1,1)\}$ η h δεν έχει ακρότατα.

Τα σημεία $(0,0)$, $(1,1)$ στα οποία η $h|_U$ έχει ελάχιστο στο $(0,0)$ και μέγιστο στο $(1,1)$ η h δεν έχει ακρότατα (ούτε τοπικά) αφού $\forall\varepsilon>0$: $h(1-\varepsilon,1-\varepsilon) = 2(1-\varepsilon) = 2-2\varepsilon < 3 \wedge h(1,1)=2<3 = h(1+\varepsilon,1)\ \forall\varepsilon>0$

$\|(1-\varepsilon,1-\varepsilon)-(1,1)\| = \sqrt{2}\varepsilon$



και $\|(1+\sqrt{2}\varepsilon,1)-(1,1)\| = \sqrt{2}\varepsilon$

Αντίστοιχα $\forall\varepsilon>0$ $h(\varepsilon,\varepsilon) = 2\varepsilon>0 = h(0,0) > h(-\varepsilon,-\varepsilon) = -1$

Άσκηση (παρεμβατική): $f(x,y) = 1-(x^2+y^2)$, $(x,y)\in U = [-1,1]\times[-1,1]$

Βρείτε και χαρακτηρίστε τοπικά και ολικά ακρότατα.

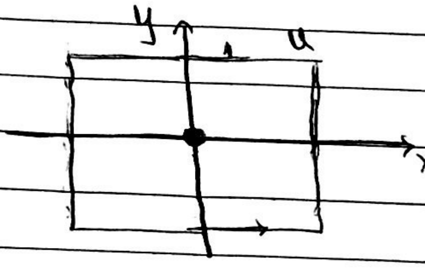
Λύση: Στο int U [η f είναι μερικώς διαφορίσιμη $\nabla f = -2(x,y) = (0,0) \rightarrow (x,y)=(0,0)$]

Έπεται το μοναδικό κρίσιμο σημείο στο $(0,0)\in \text{int}\,U = (-1,1)\times(-1,1)$

Η f είναι $C^\infty(\text{int}\,U)\subset C^2(\text{int}\,U)$ και $Hf(x,y) = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow Hf(0,0) = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$ αρνητικά ορισμένος $\rightarrow$ στο $(0,0)$ η f

έχει τοπικό μέγιστο $f(0,0) = 1-(x^2+y^2)$ και μάλιστα γνήσιο ολικό μέγιστο αφού $\forall (x,y) \neq (0,0)$: $1-(x^2+y^2) < 1$. [Άλλα ακρότατα στο υπό U δεν υπάρχουν].



Στο σύνορο έχουμε $f(-1,-1) = -1 < f(x,-1) = -x^2 < f(0,-1) = 0$ για $x \in (-1,0)$

$> f(x,-1) = -x^2 > f(1,-1) = -1$ για $x \in (0,1)$

Όμως στο $f(0,-1) = 0$ [και μεν η $f|_{\{(x,-1):\, x\in[-1,1]\}}$ έχει (τοπικό) μέγιστο, αλλά] η $f: \underline{U} \to \mathbb{R}$ δεν έχει μέγιστο, αφού π.χ. $f(0,-1+\varepsilon) =$

$= 1 - 0 - (-1+\varepsilon)^2 = 1-(1-2\varepsilon+\varepsilon^2) = 2\varepsilon - \varepsilon^2 = \underbrace{\varepsilon}_{>0}\underbrace{(2-\varepsilon)}_{>0}$ για $\varepsilon \in (0,1)$

$> 0 = f(0,-1)$